Exámenes de Selectividad

Física. Madrid 2022, Ordinaria

mentoor.es

Pregunta 1. Opción A. Campo Gravitatorio

Una partícula de masa 20 kg permanece fija en el origen de coordenadas.

a) **Calcule el campo gravitatorio generado por la masa en el punto (8, 6) m y la fuerza que experimentará una segunda partícula de masa 3 kg situada en dicho punto.**

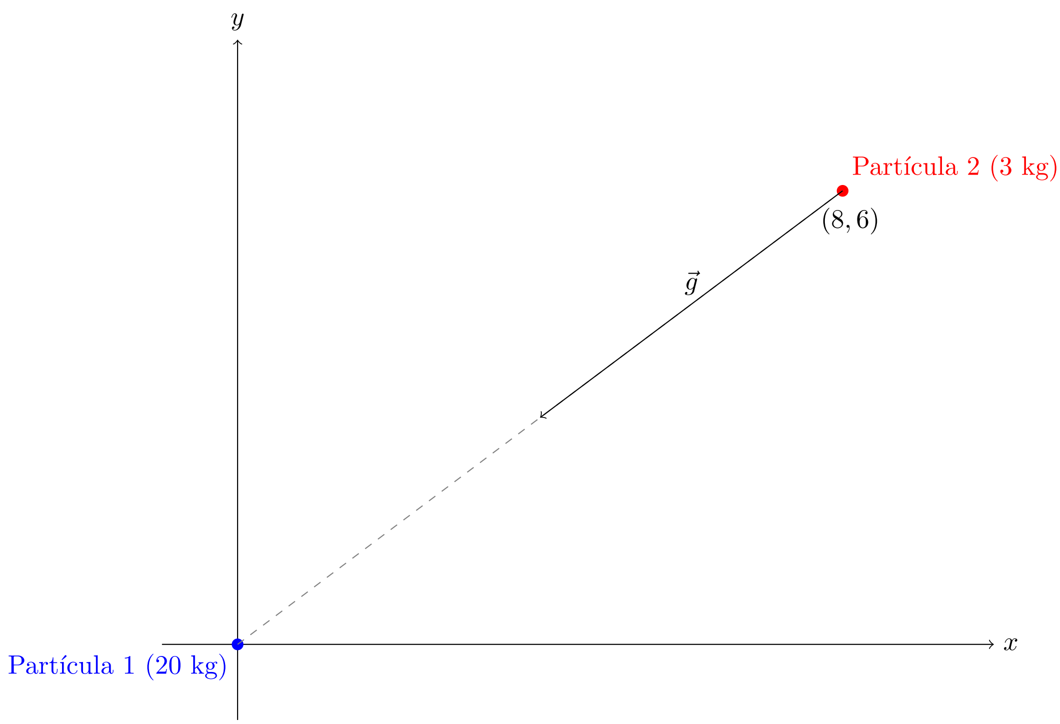
b) **Con el objetivo de alejar la segunda partícula, se le transmite una velocidad de $1,2 \cdot 10^{-5}$ m s^{-1} en la dirección de la recta que une ambas partículas. Halle el punto más alejado del origen que alcanzará dicha partícula.**

Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}.

Solución:

a) **Calcule el campo gravitatorio generado por la masa en el punto (8, 6) m y la fuerza que experimentará una segunda partícula de masa 3 kg situada en dicho punto.**

Comenzamos representando la situación:



Para determinar el campo gravitatorio generado por la masa ubicada en el origen, utilizamos primero el Teorema de Pitágoras para calcular la distancia r entre la masa y el punto $(8, 6)$:

$$r = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10\,\text{m}.$$

El campo gravitatorio es un vector que apunta hacia el origen y está dado por:

$$\vec{g} = -g(\cos(\alpha)\,\vec{i} + \sin(\alpha)\,\vec{j}),$$

donde

$$\cos(\alpha) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \quad \text{y} \quad \sin(\alpha) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Sabemos que la magnitud del campo gravitatorio es:

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 20}{10^2} = 1,33 \cdot 10^{-11}\,\text{m/s}^2.$$

Entonces, el vector campo gravitatorio en el punto $(8,6)$ es:

$$\vec{g} = -1,33 \cdot 10^{-11} \left(\frac{4}{5}\,\vec{i} + \frac{3}{5}\,\vec{j} \right) \text{ m/s}^2.$$

Ahora, la fuerza gravitatoria que experimenta la partícula de masa 3 kg situada en el punto $(8,6)$ es:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g} = 3 \cdot \left(-1,33 \cdot 10^{-11} \left(\frac{4}{5}\,\vec{i} + \frac{3}{5}\,\vec{j} \right) \right) = -4,00 \cdot 10^{-11} \left(\frac{4}{5}\,\vec{i} + \frac{3}{5}\,\vec{j} \right) \text{ N}.$$

Por lo tanto, el vector campo gravitatorio en el punto $(8,6)$ es $-1,33 \cdot 10^{-11} \left(\frac{4}{5}\,\vec{i} + \frac{3}{5}\,\vec{j} \right)$ m/s^2 y la fuerza gravitatoria que experimenta la partícula de masa 3 kg situada en el punto $(8,6)$ es $-4,00 \cdot 10^{-11} \left(\frac{4}{5}\,\vec{i} + \frac{3}{5}\,\vec{j} \right)$ N.

b) Con el objetivo de alejar la segunda partícula, se le transmite una velocidad de $1,2 \cdot 10^{-5}$ m s^{-1} en la dirección de la recta que une ambas partículas. Halle el punto más alejado del origen que alcanzará dicha partícula.

Sabemos que la energía mecánica se conserva, y la velocidad inicial de la partícula es en la dirección de la recta que une las dos partículas. La distancia final r_f se obtiene de la conservación de la energía:

$$E_c^0 + E_p^0 = E_p^f.$$

La energía cinética es

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (1,2 \cdot 10^{-5})^2 = 2,16 \cdot 10^{-10} \text{ J}.$$

El potencial gravitatorio inicial es

$$E_p^0 = -\frac{GMm}{r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 20 \cdot 3}{10} = -4,00 \cdot 10^{-10} \text{ J}.$$

Al aplicar la conservación de la energía:

$$E_c + E_p^0 = -\frac{GMm}{r_f}.$$

Despejamos r_f:

$$r_f = \frac{-GMm}{E_c + U_0} = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 20 \cdot 3}{2,16 \cdot 10^{-10} - 4,00 \cdot 10^{-10}} = 21,72 \,\text{m}.$$

Dado que la velocidad iba en la dirección de la línea que une a las dos partículas, el vector posición en el punto más alejado es:

$$\vec{r}_f = r_f (\cos(\alpha)\,\vec{i} + \sin(\alpha)\,\vec{j}) = 21,72 \left(\frac{4}{5}\,\vec{i} + \frac{3}{5}\,\vec{j} \right) = (17,37, 13,03) \,\text{m}.$$

Por lo tanto, el punto más alejado del origen que alcanzará dicha partícula es $(17,37, 13,03)$ m.

Pregunta 2. Opción A. Ondas

Por una cuerda dispuesta a lo largo del eje x viaja una onda armónica que desplaza los elementos de la cuerda en la dirección del eje y. Se sabe que los elementos A y B, respectivamente ubicados en $x_A = 0\,\mathrm{m}$ y $x_B = 2\,\mathrm{m}$, oscilan en fase y cortan al eje x cada 4 s. Teniendo en cuenta que no hay entre A y B ningún otro elemento que oscile en fase con ellos:

a) **Calcule el valor de la velocidad de propagación.**
b) **Escriba la expresión matemática de la onda, si esta viaja en el sentido negativo del eje x y en el instante inicial los elementos A y B presentan desplazamiento igual a +10 cm y velocidad nula.**

Solución:

a) **Calcule el valor de la velocidad de propagación.**

Sabemos que la relación entre la velocidad de propagación de una onda (v), su longitud de onda (λ) y su frecuencia (ν) está dada por la ecuación:

$$v = \lambda \cdot \nu.$$

Primero, debemos calcular la longitud de onda y la frecuencia. Dado que los puntos A y B oscilan en fase y no hay otros puntos que lo hagan entre ellos, podemos inferir que la distancia entre A y B es igual a una longitud de onda completa, es decir:

$$\lambda = 2\,\mathrm{m}.$$

Luego, se nos dice que cada punto pasa por el eje x cada 4 s, lo que implica que realiza una oscilación completa en el doble de ese tiempo, ya que en cada oscilación completa, el punto cruza el eje dos veces (una al subir y otra al bajar). Por lo tanto, el periodo de la onda es:

$$T = 8\,\mathrm{s}.$$

La frecuencia se obtiene como el inverso del periodo:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{8}\,\mathrm{Hz}.$$

Finalmente, la velocidad de propagación de la onda será:

$$v = \lambda \cdot \nu = 2 \cdot \frac{1}{8} = 0,25\,\mathrm{m/s}.$$

Por lo tanto, la velocidad de propagación de la onda es 0,25 m/s.

b) **Escriba la expresión matemática de la onda, si esta viaja en el sentido negativo del eje x y en el instante inicial los elementos A y B presentan desplazamiento igual a +10 cm y velocidad nula.**

La expresión general para una onda que se propaga en la dirección negativa del eje x es:

$$y(x,t) = A \cdot \cos(\omega t + kx + \phi),$$

donde ω es la frecuencia angular, k el número de onda y ϕ es la fase inicial. La frecuencia angular ω y el número de onda k se pueden obtener mediante las siguientes relaciones:

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{rad/s} \quad \text{y} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2} = \pi\,\mathrm{m}^{-1}.$$

Para determinar la fase inicial, consideramos que en $x = 0\,\mathrm{m}$ y $t = 0\,\mathrm{s}$, la velocidad es nula, lo que implica que el seno de la fase debe ser cero:

$$v(0,0) = -\omega A \sin(\phi) = 0\,\mathrm{m/s}.$$

Necesariamente, como $A \neq 0$, $\sin(\phi) = 0$, lo que nos deja dos posibles valores para la fase inicial: $\phi = 0\,\mathrm{rad}$ o $\phi = \pi\,\mathrm{rad}$. Para resolver esta ambigüedad, utilizamos la información adicional de que el desplazamiento en $x = 0\,\mathrm{m}$ y $t = 0\,\mathrm{s}$ es positivo ($y(0,0) = +0,1\,\mathrm{m}$). Entonces:

$$y(0,0) = A\cos(\phi) = 0,1\,\mathrm{m}.$$

Como el coseno debe ser positivo, concluimos que $\phi = 0\,\mathrm{rad}$. Entonces, la amplitud es:

$$A = 0,1\,\mathrm{m}.$$

Finalmente, la expresión de la onda es:

$$y(x,t) = 0,1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \pi x\right)\, m.$$

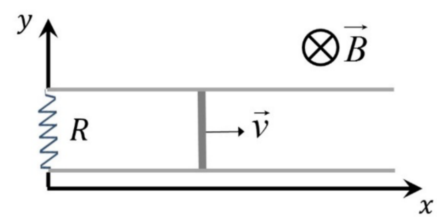
Por lo tanto, la expresión matemática de la onda es

$$\boldsymbol{y(x,t) = 0,1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \pi x\right)\, m.}$$

Pregunta 3. Opción A. Campo Electromagnético

La figura representa una varilla metálica de 20 cm de longitud, cuyos extremos deslizan sin rozamiento sobre unos raíles horizontales, paralelos al eje x, metálicos y de resistencia despreciable. La varilla tiene resistencia despreciable y su velocidad es $\vec{v} = 2\,\vec{i}\,\mathrm{m\ s^{-1}}$. Los raíles están conectados en $x = 0$ por una resistencia de valor $R = 0,5\,\Omega$. En la región hay un campo magnético uniforme $\vec{B} = -0,4\vec{k}\,\mathrm{T}$. Calcule:

a) **La intensidad de la corriente en el circuito formado por la varilla, la resistencia y los tramos de raíl entre ellas.**
b) **La fuerza $\vec{F}$ que el campo magnético ejerce sobre la varilla.**



Solución:

a) **La intensidad de la corriente en el circuito formado por la varilla, la resistencia y los tramos de raíl entre ellas.**

Para calcular la intensidad de corriente inducida en el circuito, utilizamos la Ley de Faraday y la relación entre flujo magnético y fuerza electromotriz (FEM). El flujo magnético a través de la superficie barrida por la varilla se puede expresar como:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos(\alpha).$$

En este caso, el ángulo α es 180° ya que el campo magnético está en dirección opuesta a la normal de la superficie, lo que nos da $\cos(180°) = -1$. Además, la superficie S cambia con el tiempo debido al movimiento de la varilla, por lo que:

$$S(t) = L \cdot v \cdot t,$$

donde $L = 0,2\,\mathrm{m}$ es la longitud de la varilla y $v = 2\,\mathrm{m/s}$ es la velocidad de la varilla. El flujo magnético es entonces:

$$\Phi(t) = -B \cdot L \cdot v \cdot t.$$

La FEM inducida se obtiene derivando el flujo con respecto al tiempo:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = B \cdot L \cdot v.$$

Sustituyendo los valores dados ($B = 0,4\,\mathrm{T}$, $L = 0,2\,\mathrm{m}$ y $v = 2\,\mathrm{m/s}$):

$$\mathcal{E} = 0,4 \cdot 0,2 \cdot 2 = 0,16\,\mathrm{V}.$$

La intensidad de corriente se calcula utilizando la Ley de Ohm:

$$\mathcal{E} = I \cdot R \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{0,16}{0,5} = 0,32\,\mathrm{A}.$$

Por ende, la intensidad de corriente inducida en el circuito es:

$$I = 0,32\,\mathrm{A}.$$

Por lo tanto, la intensidad de la corriente en el circuito es 0,32 A.

b) **La fuerza $\vec{F}$ que el campo magnético ejerce sobre la varilla.**

La fuerza que ejerce el campo magnético sobre la varilla se calcula utilizando la Ley de Lorentz. La expresión para la fuerza es:

$$\vec{F} = I \cdot \vec{L} \times \vec{B},$$

donde $\vec{L} = L\,\vec{i}$ es el vector que representa la longitud de la varilla y $\vec{B} = -0,4\,\vec{k}$ es el campo magnético. El producto vectorial es:

$$\vec{F} = I \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & -B \end{vmatrix}.$$

Resolvemos el determinante:

$$\vec{F} = -I \cdot L \cdot B \cdot \vec{i}.$$

Sustituyendo los valores:

$$\vec{F} = -0,32 \cdot 0,2 \cdot 0,4\,\vec{i} = -0,0256\,\vec{i}\,\mathrm{N}.$$

Por lo tanto, la fuerza que el campo magnético ejerce sobre la varilla es $\boldsymbol{-0,0256\,\vec{i}\,\mathrm{N}}$.

Pregunta 4. Opción A. Óptica

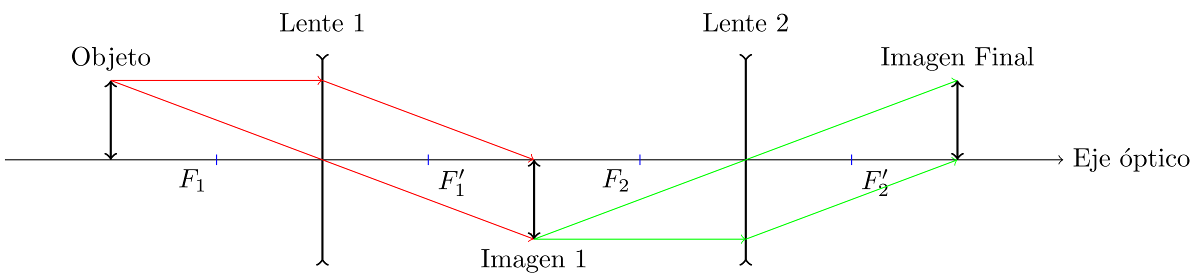
Dos lentes convergentes idénticas están separadas 16 cm. Cuando un objeto se sitúa a una cierta distancia a la izquierda de la primera lente, se encuentra que cada una de ellas opera con aumento igual a -1.

a) **Determine la potencia de las lentes.**
b) **¿Cuánto y hacia dónde debe desplazarse la segunda lente para lograr que la imagen del sistema se forme en el infinito?**

Solución:

a) **Determine la potencia de las lentes.**

Representamos en primer lugar el diagrama de rayos del sistema de dos lentes convergentes descrito en el ejercicio:



Para resolver este problema, utilizamos el hecho de que cada lente tiene un aumento lateral igual a -1. Sabemos que el aumento lateral M está relacionado con las distancias objeto (s) e imagen (s') de una lente mediante la fórmula:

$$M = \frac{s'}{s}.$$

Dado que $M = -1$, podemos concluir que para cada lente:

$$s' = -s,$$

es decir, la distancia objeto (s) y la distancia imagen (s') tienen el mismo valor en magnitud pero signos opuestos.

A continuación, utilizamos la ecuación de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s}.$$

Sustituyendo $s' = -s$ en la ecuación de las lentes:

$$s = -s' = 2f.$$

Por lo tanto, la distancia focal de cada lente es

$$f = \frac{s}{2}.$$

Dado que las distancias objeto e imagen son iguales para ambas lentes, la separación total D entre ellas es:

$$|s_1'| + |s_2| = D.$$

Puesto que $s_1 = -s_2'$, la relación se reduce a:

$$2|s_1| = D.$$

Sustituyendo $D = 16\,\text{cm}$:

$$2|s_1| = 16\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad s_1 = -\frac{D}{2} = -\frac{16}{2} = -8\,\text{cm}.$$

Dado que $s_1 = -8\,\text{cm}$, la distancia focal de cada lente es:

$$f = \frac{8}{2} = 4\,\text{cm} = 0,04\,\text{m}.$$

La potencia de una lente está dada por la inversa de su distancia focal en metros:

$$P = \frac{1}{f}.$$

Sustituyendo $f = 0,04\,\text{m}$:

$$P = \frac{1}{0,04} = 25\,\text{dioptrías}.$$

Por lo tanto, la potencia de las lentes es 25 dioptrías.

b) ¿Cuánto y hacia dónde debe desplazarse la segunda lente para lograr que la imagen del sistema se forme en el infinito?

Para que la imagen del sistema se forme en el infinito, es necesario que la imagen de la segunda lente se forme en el infinito, lo que significa que $s'_2 \to +\infty$. En este caso, la distancia objeto de la segunda lente (s_2) debe ser igual a la distancia focal de la segunda lente:

$$s_2 = -f_2 = -4\,\text{cm}.$$

Como el objeto no ha sido movido, las distancias objeto e imagen para la primera lente permanecen inalteradas. Entonces,

$$s_1 = -8\,\text{cm} \quad \text{y} \quad s'_1 = +8\,\text{cm}.$$

La relación entre las distancias sigue siendo:

$$|s'_1| + |s_2| = D.$$

Sustituyendo los valores de s'_1 y s_2:

$$8\,\text{cm} + 4\,\text{cm} = D.$$

Así, la nueva distancia entre las lentes debe ser:

$$D = 12\,\text{cm}.$$

La distancia original entre las lentes es $16\,\text{cm}$, por lo que la segunda lente debe desplazarse una cantidad x hacia la izquierda para reducir la distancia a 12 cm. Este desplazamiento es:

$$x = 16 - 12 = 4\,\text{cm}.$$

Por lo tanto, para que la imagen del sistema se forme en el infinito, la segunda lente debe moverse 4 cm hacia la izquierda.

Pregunta 5. Opción A. Física Moderna

Una muestra contiene inicialmente una masa de 30 mg de ^{210}Po. Sabiendo que su período de semidesintegración es de 138,38 días, determine:

a) **La vida media del isótopo y la actividad inicial de la muestra.**
b) **El tiempo que debe transcurrir para que el contenido de ^{210}Po de la muestra se reduzca a 5 mg.**

Datos: Masa atómica del ^{210}Po, $M_{Po} = 210\,\text{u}$; Número de Avogadro, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$.

Solución:

a) **La vida media del isótopo y la actividad inicial de la muestra.**

La constante de desintegración radiactiva (λ) se relaciona con el período de semidesintegración $T_{1/2}$ mediante la ecuación:

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}.$$

Despejando λ:

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}}.$$

Dado que el período de semidesintegración del ^{210}Po es $T_{1/2} = 138,38\,\text{días}$, primero lo convertimos a segundos, ya que λ suele expresarse en unidades de s^{-1}:

$$T_{1/2} = 138,38\,\text{días} = 138,38 \cdot 24 \cdot 3600\,\text{s} = 1,20 \cdot 10^7\,\text{s}.$$

Sustituyendo en la ecuación de λ:

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{1,20 \cdot 10^7\,\text{s}} = 5,79 \cdot 10^{-8}\,\text{s}^{-1}.$$

Para expresar λ en días^{-1}, utilizamos que $1\,\text{día} = 86400\,\text{s}$:

$$\lambda = 5,79 \cdot 10^{-8}\,\text{s}^{-1} \cdot 86400\,\text{s/día} = 5,01 \cdot 10^{-3}\,\text{días}^{-1}.$$

La vida media τ es el inverso de la constante de desintegración:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}.$$

Sustituyendo el valor de λ en días^{-1}:

$$\tau = \frac{1}{5,01 \cdot 10^{-3}\,\text{días}^{-1}} = 199,64\,\text{días}.$$

En segundos:

$$\tau = \frac{1}{5,79 \cdot 10^{-8}\,\text{s}^{-1}} = 1,72 \cdot 10^7\,\text{s}.$$

La actividad de una muestra radiactiva está dada por la relación:

$$A(t) = -\frac{dN(t)}{dt} = -\frac{d(N_0 \cdot e^{-\lambda t})}{dt} = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda t} = \lambda \cdot N(t),$$

donde $N(t)$ es el número de átomos radiactivos presentes en el tiempo t. La actividad inicial A_0 se calcula cuando $t = 0$, es decir, cuando la cantidad de átomos es N_0, el número inicial de átomos en la muestra:

$$A_0 = \lambda N_0.$$

Para calcular A_0, necesitamos conocer N_0, el número inicial de átomos. La cantidad de átomos iniciales N_0 está relacionada con la masa inicial de la muestra. Dado que la masa atómica del ^{210}Po es $M_{Po} = 210\,\text{u}$, y que un mol de cualquier sustancia contiene el número de Avogadro de átomos $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$, podemos calcular el número inicial de átomos en la muestra de 30 mg. Primero, convertimos la masa de la muestra a gramos:

$$m = 30\,\text{mg} = 0,03\,\text{g}.$$

Ahora, el número de moles de polonio en la muestra es:

$$n = \frac{m}{M_{Po}} = \frac{0,03\,\text{g}}{210\,\text{g/mol}} = 1,43 \cdot 10^{-4}\,\text{mol}.$$

El número inicial de átomos es:

$$N_0 = n \cdot N_A = 1,43 \cdot 10^{-4}\,\text{mol} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1} = 8,61 \cdot 10^{19}\,\text{átomos}.$$

Finalmente, calculamos la actividad inicial sustituyendo los valores de λ y N_0:

$$A_0 = \lambda N_0 = 5,79 \cdot 10^{-8}\,\text{s}^{-1} \cdot 8,61 \cdot 10^{19}\,\text{átomos} = 4,99 \cdot 10^{12}\,\text{Bq}.$$

Por lo tanto, la vida media del isótopo es 199,64 días y la actividad inicial de la muestra es $\mathbf{4,99 \cdot 10^{12}}$ Bq.

b) El tiempo que debe transcurrir para que el contenido de ^{210}Po de la muestra se reduzca a 5 mg.

Sabemos que el número de átomos de una muestra radiactiva es directamente proporcional a la masa que contiene en cada instante. La masa de la muestra, al ser proporcional al número de átomos, también sigue una relación similar:

$$m(t) = m_0 e^{-\lambda t}.$$

En nuestro caso, queremos determinar el tiempo t necesario para que la masa inicial de 30 mg ($m_0 = 0,03\,\text{g}$) se reduzca a 5 mg ($m(t) = 0,005\,\text{g}$). Despejando el tiempo de la ecuación anterior, tenemos:

$$t = -\frac{\ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right)}{\lambda}.$$

Sustituimos los valores de $m(t)$, m_0 y la constante de desintegración $\lambda = 5,79 \cdot 10^{-8}\,\text{s}^{-1}$ obtenida previamente:

$$t = -\frac{\ln\left(\frac{0{,}005\,\text{g}}{0{,}03\,\text{g}}\right)}{5,79 \cdot 10^{-8}\,\text{s}^{-1}} = 3,09 \cdot 10^{7}\,\text{s} = 357,63\,\text{días}.$$

Por lo tanto, el tiempo necesario para que la masa de la muestra se reduzca a 5 mg es aproximadamente 357 días.

Pregunta 1. Opción B. Campo Gravitatorio

Marte posee la décima parte de la masa de la Tierra y la mitad de su diámetro.

a) **Encuentre la relación entre las velocidades de escape de Marte y de la Tierra desde sus respectivas superficies.**

b) **Suponga que un objeto se lanza verticalmente desde la superficie terrestre, con una velocidad igual a la velocidad de escape de Marte. Si se desprecia el rozamiento, ¿qué altura máxima alcanzaría el objeto?**

Dato: Radio de la Tierra, $R_T = 6,37 \cdot 10^6$ m.

Solución:

a) **Encuentre la relación entre las velocidades de escape de Marte y de la Tierra desde sus respectivas superficies.**

La velocidad de escape se puede calcular mediante la expresión:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}},$$

donde M es la masa del planeta y R su radio. Si Marte tiene una masa que es una décima parte de la masa terrestre, es decir, $M_M = \frac{M_T}{10}$, y su radio es la mitad del radio terrestre, $R_M = \frac{R_T}{2}$, entonces al sustituir estos valores en la ecuación de la velocidad de escape obtenemos para Marte:

$$v_M = \sqrt{\frac{2GM_M}{R_M}} = \sqrt{\frac{2G\frac{M_T}{10}}{\frac{R_T}{2}}} = \sqrt{\frac{2GM_T}{5R_T}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot v_T.$$

Por lo tanto, la relación entre la velocidad de escape de Marte y la de la Tierra es:

$$\boldsymbol{v_M = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot v_T.}$$

b) **Suponga que un objeto se lanza verticalmente desde la superficie terrestre, con una velocidad igual a la velocidad de escape de Marte. Si se desprecia el rozamiento, ¿qué altura máxima alcanzaría el objeto?**

Dado que la fuerza gravitacional es conservativa, la energía mecánica total se conserva. En la altura máxima, la velocidad del objeto es nula, por lo que toda su energía es potencial. Al principio, el objeto tiene energía cinética y potencial, de modo que la conservación de la energía se puede expresar como

$$E_c + E_p^{R_T} = E_p^{r_{\max}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_M^2 - \frac{GM_Tm}{R_T} = -\frac{GM_Tm}{r_{\max}}.$$

Sustituyendo la velocidad de escape de Marte $v_M = \sqrt{\frac{2GM_T}{5R_T}}$, la expresión se reduce a:

$$\frac{1}{5R_T} - \frac{1}{R_T} = -\frac{1}{r_{\max}}.$$

De aquí, despejamos $r_{\max}$:

$$r_{\max} = \frac{5}{4} \cdot R_T.$$

Finalmente, como el radio total es la suma del radio de la Tierra y la altura respecto a su superficie, tenemos que:

$$r_{\max} = R_T + h \quad \Rightarrow \quad h = r_{\max} - R_T = \frac{R_T}{4}.$$

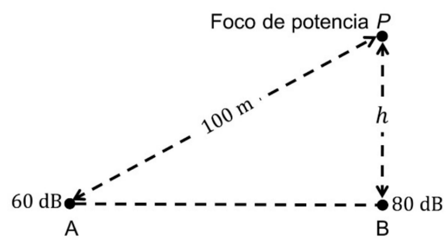
Por lo tanto, la altura máxima que alcanza el objeto es $\boldsymbol{\frac{R_T}{4}}$.

Pregunta 2. Opción B. Ondas

Un foco sonoro de potencia P se coloca a una altura h sobre el suelo, como ilustra la figura. El nivel de intensidad sonora vale 60 dB en el punto A, a 100 m de distancia del foco, y alcanza 80 dB en el punto B, en el suelo en la vertical del foco.

a) **Calcule P y h.**
b) **¿Cuál sería el nivel de intensidad en el punto B si se agregase sobre él otro foco de igual potencia a una altura de $h/2$?**

Dato: Intensidad umbral de audición, $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}.



Solución:

a) **Calcule P y h.**

La relación que define el nivel de intensidad sonora β es:

$$\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right).$$

De esta expresión, despejamos la intensidad sonora I:

$$I = I_0 \cdot 10^{\frac{\beta}{10}}.$$

Para un nivel de intensidad de 80 dB, tenemos:

$$I = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{80}{10}} = 10^{-12} \cdot 10^{8} = 10^{-4}\,\mathrm{W/m^2}.$$

Y para 60 dB:

$$I = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{60}{10}} = 10^{-12} \cdot 10^{6} = 10^{-6}\,\mathrm{W/m^2}.$$

Sabemos que la intensidad está relacionada con la potencia P y la superficie esférica $S = 4\pi r^2$ mediante la expresión:

$$I = \frac{P}{S} \quad \Rightarrow \quad P = I \cdot S = I \cdot 4\pi r^2.$$

Para el punto A, donde $r = 100$ m e $I = 10^{-6}\,\mathrm{W/m^2}$, tenemos:

$$P = 10^{-6} \cdot 4\pi \cdot (100^2) = 10^{-6} \cdot 4\pi \cdot 10^4 = \frac{\pi}{25}\,\mathrm{W}.$$

Ahora, para determinar la altura h, utilizamos la misma expresión de potencia en el punto B, donde $I = 10^{-4}$ W m^{-2}, y despejamos $r = h$:

$$P = I \cdot 4\pi h^2.$$

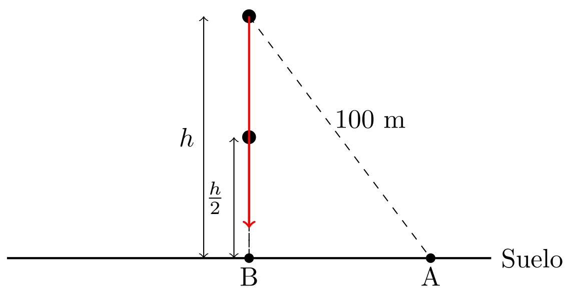
Sustituyendo los valores, obtenemos:

$$h = \sqrt{\frac{P}{4\pi I}} = \sqrt{\frac{\pi/25}{4\pi \cdot 10^{-4}}} = 10\,\mathrm{m}.$$

Por lo tanto, la altura es 10 m y la potencia del foco es $\frac{\pi}{25}$ W.

b) **¿Cuál sería el nivel de intensidad en el punto B si se agregase sobre él otro foco de igual potencia a una altura de $h/2$?**

Si se añade otro foco con la misma potencia a la mitad de la altura ($h/2$), la intensidad en el punto B aumentaría, ya que ambos focos contribuirían con la misma potencia:



La intensidad total que se percibe se puede expresar como:

$$I_T = I + I',$$

donde la intensidad I' se calcula mediante la relación:

$$I' = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2}.$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$I' = \frac{\frac{\pi}{25}}{4\pi \cdot 5^2} = 4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{W/m^2}.$$

Así, la intensidad total se convierte en:

$$I_T = 10^{-4} + 4 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{W/m^2}.$$

Al sustituir este valor en la fórmula para el nivel de intensidad sonora en decibelios, se tiene:

$$\beta_T = 10 \cdot \log\left(\frac{5 \cdot 10^{-4}}{10^{-12}}\right) = 87\,\mathrm{dB}.$$

Por lo tanto, el nivel de intensidad sonora en el punto B sería de 87 dB.

Pregunta 3. Opción B. Campo Electromagnético

Una carga puntual positiva está situada en el punto (3, 4) m del plano xy. En otro punto del plano se coloca una segunda carga puntual, también positiva y de magnitud el cuádruple de la primera, haciendo que el campo se anule en el origen de coordenadas.

a) **Determine la posición de la segunda carga.**
b) **Si el potencial en el origen de coordenadas vale $1,08 \cdot 10^4$ V, encuentre el valor de las cargas.**

Dato: Constante de la ley de Coulomb, $K = 9 \cdot 10^9$ N m^{2}C^{-2}.

Solución:

a) **Determine la posición de la segunda carga.**

Para que el campo eléctrico total en el origen sea nulo, el campo generado por la carga q_2 debe ser igual y de sentido opuesto al creado por la carga q_1. Esto implica que, en términos de magnitudes, ambos campos eléctricos deben ser equivalentes. Llamemos r_1 a la distancia de la carga q_1 al origen y r_2 a la distancia de q_2 al mismo punto. Entonces podemos escribir la relación:

$$E_1 = E_2 \quad \Rightarrow \quad k\frac{q_1}{r_1^2} = k\frac{q_2}{r_2^2}.$$

Eliminando la constante k de Coulomb:

$$\frac{q_1}{r_1^2} = \frac{q_2}{r_2^2}.$$

Dado que $q_2 = 4q_1$, sustituimos en la ecuación:

$$\frac{q_1}{r_1^2} = \frac{4q_1}{r_2^2} \quad \Rightarrow \quad r_2^2 = 4r_1^2 \quad \Rightarrow \quad r_2 = 2r_1.$$

Aplicando el Teorema de Pitágoras para determinar r_1, que es la distancia de q_1 al origen:

$$r_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,\text{m}.$$

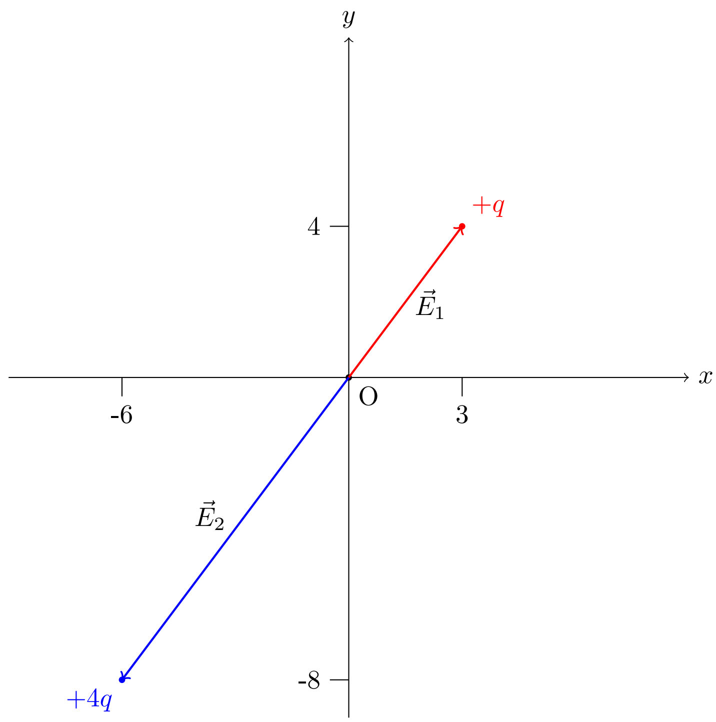
De este modo, se obtiene:

$$r_2 = 2r_1 = 10\,\text{m}.$$

Además, observamos que la carga q_2 debe ubicarse en el tercer cuadrante. Entonces, su vector de posición se expresa como:

$$\vec{r}_2 = -2 \cdot \vec{r}_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_2 = -2 \cdot (3, 4) = (-6, -8)\,\text{m}.$$

Visualmente:



Por lo tanto, la posición de la segunda carga es $(-6, -8)$ m.

b) **Si el potencial en el origen de coordenadas vale $1,08 \cdot 10^4$ V, encuentre el valor de las cargas.**

El potencial total generado por ambas cargas es:

$$V = V_1 + V_2,$$

donde el potencial debido a una carga puntual se define como

$$V = k\frac{q}{r}.$$

Entonces, el potencial en el origen debido a q_1 y q_2 se expresa como:

$$V_1 = k\frac{q_1}{r_1} \quad \text{y} \quad V_2 = k\frac{q_2}{r_2}.$$

Sustituyendo $q_2 = 4q_1$ y $r_2 = 10$:

$$V = k\frac{q_1}{5} + k\frac{4q_1}{10} = k\frac{q_1}{5} + k\frac{2q_1}{5} = k\frac{3q_1}{5}.$$

Dado que el potencial en el origen se conoce como $1.08 \cdot 10^4$ V, tenemos:

$$1.08 \cdot 10^4 = k\frac{3q_1}{5} \quad \Rightarrow \quad q_1 = \frac{1.08 \cdot 10^4 \cdot 5}{3k} = \frac{1.08 \cdot 10^4 \cdot 5}{3 \cdot 9 \cdot 10^9} = 2 \cdot 10^{-6}\,\text{C}.$$

Así, q_2 será:

$$q_2 = 4q_1 = 8 \cdot 10^{-6}\,\text{C}.$$

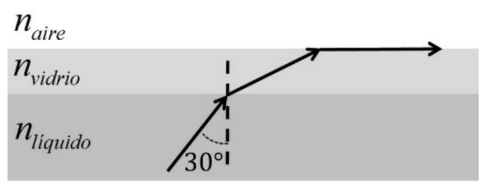
Por lo tanto, el valor de la primera carga es $2 \cdot 10^{-6}$ C y el de la segunda es $8 \cdot 10^{-6}$ C.

Pregunta 4. Opción B. Ondas

Una lámina de vidrio se halla sobre un líquido de índice de refracción desconocido. La longitud de onda de la luz en el vidrio se reduce a un 70 % de su valor en el aire. Si se emite luz desde el líquido, los rayos con ángulos de incidencia superiores a 30º en la cara inferior de la lámina no se refractan al aire por su cara superior. Calcule:

a) **El índice de refracción del vidrio.**
b) **El índice de refracción del líquido.**

Dato: Índice de refracción del aire, $n_{aire} = 1$.



Solución:

a) **El índice de refracción del vidrio.**

El índice de refracción del vidrio n_{vidrio} se puede expresar como:

$$n_{\text{vidrio}} = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_0}{\lambda},$$

donde λ_0 es la longitud de onda en el vacío y λ es la longitud de onda en el vidrio. Dado que $\lambda = 0,7\lambda_0$, podemos simplificar la expresión anterior:

$$n_{\text{vidrio}} = \frac{\lambda_0}{0,7\lambda_0} = \frac{1}{0,7} = 1,4286.$$

Por lo tanto, el índice de refracción del vidrio es 1,4286.

b) **El índice de refracción del líquido.**

Para ángulos de incidencia superiores a 30°, no se observa refracción en la frontera entre el vidrio y el aire. Esto indica que el rayo de luz alcanza el ángulo crítico en esta interfaz. El ángulo crítico, α_L, se puede calcular mediante la Ley de Snell, considerando que el ángulo de refracción en el aire es 90°:

$$n_{\text{vidrio}} \cdot \sin(\alpha_L) = n_{\text{aire}} \cdot \sin(90°) \quad \Rightarrow \quad \sin(\alpha_L) = \frac{n_{\text{aire}}}{n_{\text{vidrio}}} = \frac{1}{n_{\text{vidrio}}}.$$

Por lo tanto, el ángulo crítico se puede expresar como:

$$\alpha_L = \arcsin\left(\frac{1}{n_{\text{vidrio}}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1,4286}\right) = 44,37°.$$

Dado que el ángulo de incidencia en el líquido es $\alpha = 30°$ y el ángulo refractado en el vidrio es $\beta = \alpha_L = 44,37°$, podemos usar la Ley de Snell para determinar el índice de refracción del líquido $n_{\text{líquido}}$:

$$n_{\text{líquido}} \cdot \sin(\alpha) = n_{\text{vidrio}} \cdot \sin(\beta) \quad \Rightarrow \quad n_{\text{líquido}} = n_{\text{vidrio}} \cdot \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}.$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$n_{\text{líquido}} = 1,4286 \cdot \frac{\sin(44,37^\circ)}{\sin(30^\circ)} = 2.$$

Por lo tanto, el índice de refracción del líquido es 2.

Pregunta 5. Opción B. Física Moderna

Un electrón relativista ha llegado a adquirir una energía cinética equivalente a la energía de un fotón de $5 \cdot 10^{-12}$ m de longitud de onda en el vacío. Calcule:

a) **La energía cinética del electrón, en eV.**
b) **La velocidad del electrón.**

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; Constante de Planck, $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J s; Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}; Masa del electrón en reposo, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg.

Solución:

a) **La energía cinética del electrón, en eV.**

La energía asociada a un fotón puede ser expresada como:

$$E_\gamma = h\nu = \frac{hc}{\lambda}.$$

Sustituyendo la longitud de onda de $5 \cdot 10^{-12}$ m:

$$E_\gamma = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{-12}} = 3,978 \cdot 10^{-14}\,\text{J} = 248652\,\text{eV}.$$

Por lo tanto, la energía cinética del electrón es 248652 eV.

b) **La velocidad del electrón.**

Sabemos que la energía en reposo de una partícula está dada por $E_0 = m_e c^2$ y la energía total es $E_T = \gamma m_e c^2$. Por tanto, la energía cinética se puede calcular como:

$$E_T = E_0 + E_c \quad \Rightarrow \quad E_c = E_T - E_0 \quad \Rightarrow \quad E_c = (\gamma - 1)m_e c^2.$$

Para encontrar la velocidad, primero despejamos γ:

$$\gamma = 1 + \frac{E_c}{m_e c^2}.$$

Sustituyendo los valores:

$$\gamma = 1 + \frac{3,978 \cdot 10^{-14}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2} = 1,485.$$

Usando la relación entre γ y la velocidad v:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Despejando v:

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2}.$$

Así, la velocidad del electrón se determina como:

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{(1,485)^2}} = 0,739c = 2,218 \cdot 10^8\,\text{m/s}.$$

Por lo tanto, la velocidad del electrón es $2,218 \cdot 10^8$ m/s.